독립심화학습 11주차

2017103580 김정운

변분법은 optimal control이 state에 대한 도함수인 최적제어문제인데, 최적문제의 특별한 경우라고 할 수 있다. 하지만 변분법은 제어문제와 몇 가지 차이점을 가지고 있는데, 우선 변분법은 어떤 현상을 기술하는데 주로 사용된다. principle of minimum energy를 공리로 삼고 이를 만족하는 운동을 기술하기 위해 변분법을 사용하는데, 해당 원칙은 모든 운동이 에너지를 최소한으로 사용한다는 것이다. 반면 제어이론은 state에 대한 미분방정식이 주어지면, state를 어떤 상태로 도달하게끔 하는 control 중에서 일정한 조건과 기준을 만족하는 것을 선택할 때 사용된다. 특히 도달하고자 하는 상태가 unstable equilibrium or saddle point 이거나 다른 equilibrium으로 수렴하지 않도록 하기 위해, optimal control을 미분방정식에 반영한다.

특히 경제학에서 위와 같은 목적으로 optimal control을 사용하는 경향이 있는데, 중고차 시장과 같이 레몬만 공급될 가능성이 있는 시장을 생각해보자. 해당 시장의 equilibrium은 2개가 있는데, 하나는 온전한 상태의 물건으로만 채워지고 나머지는 레몬(성능이 나쁜 물건)만 시장에 공급된 상태가 있다. 이때 어떤 control(ex, 품질보증이나 사전점검 등)을 도입해야 해당 equilibrium으로 도달할 뿐만 아니라, 효율적으로 도달할 수 있는가를 관찰하기 위해 optimal control을 사용한다. 감염병 모형에서 제어이론은 equilibrium(감염자수=alpha)로 수렴하는 것이 확실한 상황에서, 해당 이퀼리브리엄으로 수렴하는 속도를 줄이는 방법에 대해 optimal control을 사용하기도 한다.

변분법은 제어이론보다 오래되었을 뿐만 아니라, 자주 사용되었기 때문에 이와 관련된 이론들이 잘 발달되어 있다. 단순히 최적해의 존재성 뿐만 아니라, state에 대한 제한조건이 있을 때 해의 존재성 등과 관련된 정리들이, 변분법에서 잘 다뤄지고 있다. 최적제어문제에서도 해의 존재성과 관련된 정리들이 있지만, 제한조건이 있는 경우에는 한계가 있는 걸로 알고 있다. 우선 Hamilton-Jaccobi-Bellman 방정식과 같이 dynamic programming으로 최적해를 찾고자 할 때, state와 control이 제한조건을 어떻게 만족시킬 수 있는가에 대한 설명이 현재 부족하다. 왜냐하면 다른 최적화 문제들은 제한조건을 기존 cost function에 추가한 라그랑지안에 대해 최적해를 구하지만, HJB는 그렇지 않기 때문이다.

기존 cost function에 라그랑지안 승수\*(제한조건)을 추가한 것을 최적화하면, 그 해는 cost function을 최소화하면서 동시에 제한조건을 만족한다는 것이 잘 알려져 있다. 변분법에서도 마찬가지이다. 하지만 최적제어문제에서는 control term 때문에 이와 같은 제한조건을 최적해에 반영하는데 한계가 있다. Pontraygain’s minimum principle에서는 기존처럼 제한조건을 라그랑지안으로 반영하여 최적해를 구할 수 있다는 것을 보여주지만, 제한조건은 control에 대한 함수가 아닌 경우에만 사용할 수 있다(control과 state를 모두 input으로 하는 제한조건 하에서, 제어문제를 풀 수 있지만 기존보다 훨씬 복잡하기 때문에 우선은 생략하도록 하겠다.). HJB 방정식은 backward 방법을 통해 final state가 어떤 조건을 만족한다는 것을 보장하지만, 그 외 제한조건을 충족시키는 optimal control을 구하는 방법은 아직 보지 못했다. Verification method를 증명하는 과정에서 라그랑지안 승수법을 사용할 수 있으면, HJB 방정식도 제한조건을 만족하는 최적해를 구할 수 있다. 하지만 라그랑지안 승수법을 optimal control에서도 사용할 수 있는지를 확신할 수 없다.